Exámenes de Selectividad

Matemáticas. Andalucía 2020, Extraordinaria

mentoor.es

Ejercicio 1. Análisis

Considera la función $\mathbf{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $\mathbf{f(x)=e^x(x^2-5x+6)}$. Determina los intervalos de concavidad y de convexidad de f y los puntos de inflexión de su gráfica.

Solución:

Para determinar los intervalos de concavidad y convexidad de la función $f(x)=e^x(x^2-5x+6)$, necesitamos estudiar el signo de su segunda derivada. Calculamos la primera derivada $f'(x)$ utilizando la regla del producto $(uv)'=u'v+uv'$, donde $u=e^x$ y $v=x^2-5x+6$:

$$f'(x)=(e^x)(x^2-5x+6)+(e^x)(2x-5)=e^x(x^2-5x+6+2x-5)=e^x(x^2-3x+1).$$

Calculamos la segunda derivada $f''(x)$ derivando $f'(x)=e^x(x^2-3x+1)$ utilizando la regla del producto nuevamente, con $u=e^x$ y $v=x^2-3x+1$:

$$f''(x)=(e^x)(x^2-3x+1)+(e^x)(2x-3)=e^x(x^2-3x+1+2x-3)=e^x(x^2-x-2).$$

Los posibles puntos de inflexión ocurren donde la segunda derivada es cero. Igualamos la segunda derivada a cero:

$$f''(x)=0 \quad\Rightarrow\quad e^x(x^2-x-2)=0$$

Como $e^x>0$ para todo x, la ecuación se reduce a $x^2-x-2=0$:

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}.$$

Las soluciones son $x=2$ y $x=-1$. Analizamos el signo de la segunda derivada en los intervalos definidos por estos puntos: $(-\infty,-1)$, $(-1,2)$ y $(2,\infty)$.

- Intervalo $(-\infty,-1)$: Para $x=-2$, $f''(-2)=e^{-2}((-2)^2-(-2)-2)=4e^{-2}>0$. Por lo tanto, $f(x)$ es convexa en $(-\infty,-1)$.
- Intervalo $(-1,2)$: Para $x=0$, $f''(0)=e^0((0)^2-(0)-2)=-2<0$. Por lo tanto, $f(x)$ es cóncava en $(-1,2)$.
- Intervalo $(2,\infty)$: Para $x=3$, $f''(3)=e^3((3)^2-(3)-2)=4e^3>0$. Por lo tanto, $f(x)$ es convexa en $(2,\infty)$.

Los puntos de inflexión ocurren donde cambia la concavidad, es decir, en $x=-1$ y $x=2$. Calculamos las coordenadas y de estos puntos:

$$f(-1)=e^{-1}((-1)^2-5(-1)+6)=e^{-1}(1+5+6)=12e^{-1}=\frac{12}{e}.$$

El punto de inflexión es $\left(-1,\frac{12}{e}\right)$.

$$f(2)=e^2((2)^2-5(2)+6)=e^2(4-10+6)=e^2(0)=0$$

El punto de inflexión es $(2,0)$.

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{La función } f(x) \text{ es convexa en } (-\infty,-1)\cup(2,\infty)\\ \text{La función } f(x) \text{ es cóncava en } (-1,2)\\ \text{Los puntos de inflexión son } \left(-1,\frac{12}{e}\right) \text{ y } (2,0)\end{array}}$$

Ejercicio 2. Análisis

Calcula $\int_0^\pi \mathbf{x}\sin^2(\mathbf{x})\,\mathbf{dx}$.

Solución:

Queremos calcular la integral definida $\int_0^\pi x\sin^2(x)\,dx$. Simplificamos el integrando usando la identidad trigonométrica $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$. Sustituimos esto en la integral:

$$\int_0^\pi x\sin^2(x)\,dx = \int_0^\pi x\left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi (x - x\cos(2x))\,dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^\pi x\,dx - \int_0^\pi x\cos(2x)\,dx\right).$$

Calculamos la primera integral:

$$\int_0^\pi x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{\pi^2}{2}.$$

Calculamos la segunda integral usando integración por partes. Usamos $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ con $u = x$, $dv = \cos(2x)\,dx$, lo que implica $du = dx$ y $v = \frac{\sin(2x)}{2}$:

$$\int x\cos(2x)\,dx = x\cdot\frac{\sin(2x)}{2} - \int \frac{\sin(2x)}{2}\,dx = \frac{x\sin(2x)}{2} + \frac{\cos(2x)}{4} + C.$$

Evaluamos la integral definida:

$$\int_0^\pi x\cos(2x)\,dx = \left[\frac{x\sin(2x)}{2} + \frac{\cos(2x)}{4}\right]_0^\pi = \left(\frac{\pi\sin(2\pi)}{2} + \frac{\cos(2\pi)}{4}\right) - \left(\frac{0\sin(0)}{2} + \frac{\cos(0)}{4}\right) = 0.$$

Combinamos los resultados:

$$\int_0^\pi x\sin^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^\pi x\,dx - \int_0^\pi x\cos(2x)\,dx\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{2} - 0\right) = \frac{\pi^2}{4}.$$

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{\int_0^\pi x\sin^2(x)\,dx = \frac{\pi^2}{4}}$$

Ejercicio 3. Álgebra

Considera el sistema de ecuaciones dado por $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ siendo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ m & 4 & -2 \\ 0 & m+2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2m \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) **Discute el sistema según los valores de m.**
b) **Para $\mathbf{m} = -\mathbf{2}$, ¿existe alguna solución con $\mathbf{z} = \mathbf{0}$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta.**

Solución:

a) **Discute el sistema según los valores de m.**

El sistema de ecuaciones lineales $AX = B$ tiene como matriz de coeficientes A y vector de términos independientes B. Para discutir el sistema, calculamos el determinante de la matriz A:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ m & 4 & -2 \\ 0 & m+2 & -3 \end{vmatrix}.$$

Desarrollamos el determinante por la primera columna:

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ m+2 & -3 \end{vmatrix} - m \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ m+2 & -3 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (4(-3) - (-2)(m+2)) - m \cdot ((-2)(-3) - 1(m+2)) + 0 = m^2 - 2m - 8. \end{aligned}$$

Igualamos el determinante a cero para encontrar los valores de m para los cuales el sistema puede tener soluciones múltiples o ninguna solución:

$$m^2 - 2m - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2}.$$

Las soluciones son $m = 4$ y $m = -2$. Distinguimos los siguientes casos:
Caso 1: Si $m \neq 4$ y $m \neq -2$. En este caso, $\det(A) \neq 0$, por lo que la matriz A es invertible y el sistema tiene una única solución (sistema compatible determinado).
Caso 2: Si $m = 4$. La matriz ampliada es:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & -2 & 8 \\ 0 & 6 & -3 & 1 \end{array}\right).$$

Realizamos operaciones elementales por filas:

$$A^* \xrightarrow{F_2 \leftarrow F_2 - 4F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 12 & -6 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \leftarrow \frac{1}{6}F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 - 3F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

La última fila corresponde a la ecuación $0x + 0y + 0z = 1$, que es imposible. Por lo tanto, si $m = 4$, el sistema es incompatible (no tiene solución).
Caso 3: Si $m = -2$. La matriz ampliada es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right).$$

Realizamos operaciones elementales por filas:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \leftarrow F_2 + 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

El rango de la matriz A es 2 (ya que hay dos filas no nulas linealmente independientes) y el rango de la matriz ampliada también es 2. Como el rango es menor que el número de incógnitas (3), el sistema es compatible indeterminado (tiene infinitas soluciones).

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{\begin{cases} \text{Si } m \neq 4 \text{ y } m \neq -2, \text{ el sistema es compatible determinado (solución única)} \\ \text{Si } m = 4, \text{ el sistema es incompatible (no tiene solución)} \\ \text{Si } m = -2, \text{ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)} \end{cases}}$$

b) Para $\mathbf{m = -2}$, ¿existe alguna solución con $\mathbf{z = 0}$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta.

Para $m = -2$, el sistema de ecuaciones equivalente a la matriz escalonada obtenida en el apartado anterior es:

$$\begin{cases} x - 2y + z &= 2 \\ \quad\quad -3z &= 1 \end{cases}$$

De la segunda ecuación, obtenemos $z = -\frac{1}{3}$. Si buscamos una solución con $z = 0$, sustituimos este valor en las ecuaciones:

$$x - 2y + 0 = 2 \Rightarrow x - 2y = 2,$$
$$-3(0) = 1 \Rightarrow 0 = 1.$$

La segunda ecuación $0 = 1$ es una contradicción. Por lo tanto, no existe ninguna solución con $z = 0$ para $m = -2$.

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{\text{Para } m = -2, \text{ no existe ninguna solución con } z = 0, \text{ ya que la segunda ecuación implica } z = -\frac{1}{3}}$$

Ejercicio 4. Geometría

Considera el plano $\pi \equiv \mathbf{x - y + az = 0}$ y la recta $\mathbf{r} \equiv \begin{cases} 4x - 3y + 4z = 1 \\ 3x - 2y + z = 0 \end{cases}$.

a) **Halla a sabiendo que π es paralelo a r.**
b) **Determina el plano perpendicular a r que pasa por el punto $\mathbf{P(1, 2, 3)}$.**

Solución:

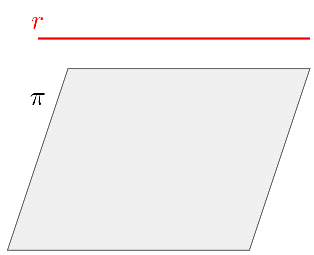
a) **Halla a sabiendo que π es paralelo a r.**

El plano $\pi \equiv x - y + az = 0$ tiene como vector normal $\vec{n}_\pi = (1, -1, a)$. La recta r está dada por la intersección de dos planos. Su vector director $\vec{v}_r$ se puede obtener como el producto vectorial de los vectores normales de los dos planos que la definen. Los vectores normales son $\vec{n}_1 = (4, -3, 4)$ y $\vec{n}_2 = (3, -2, 1)$.

$$\vec{v}_r = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = ((-3)(1) - (4)(-2))\vec{i} - ((4)(1) - (4)(3))\vec{j} + ((4)(-2) - (-3)(3))\vec{k} = (5, 8, 1).$$

Para que el plano π sea paralelo a la recta r, el vector normal del plano $\vec{n}_\pi$ debe ser perpendicular al vector director de la recta $\vec{v}_r$. Esto significa que su producto escalar debe ser cero:

$$\vec{n}_\pi \cdot \vec{v}_r = 0 \quad \Rightarrow \quad (1)(5) + (-1)(8) + (a)(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 3.$$

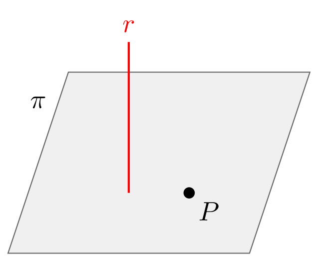


Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{a = 3}$$

b) **Determina el plano perpendicular a r que pasa por el punto $\mathbf{P(1, 2, 3)}$.**

Un plano perpendicular a la recta r tendrá como vector normal el vector director de la recta $\vec{v}_r = (5, 8, 1)$.



La ecuación de un plano con vector normal (n_x, n_y, n_z) que pasa por un punto (x_0, y_0, z_0) es $n_x(x - x_0) + n_y(y - y_0) + n_z(z - z_0) = 0$. En este caso, el punto es $P(1, 2, 3)$ y el vector normal es $(5, 8, 1)$:

$$5(x - 1) + 8(y - 2) + 1(z - 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad 5x - 5 + 8y - 16 + z - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 5x + 8y + z - 24 = 0.$$

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{5x + 8y + z - 24 = 0}$$

Ejercicio 5. Análisis

Sea la función derivable f $: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **definida por**

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} e^{2ax-4b} & \text{si } x < 1 \\ 1 - x\ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

(ln denota la función logaritmo neperiano).

a) **Determina los valores de a y b.**
b) **Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 2.**

Solución:

a) **Determina los valores de a y b.**

Para que la función $f(x)$ sea derivable en $\mathbb{R}$, debe ser continua y derivable en $x = 1$.

<u>Continuidad en $x = 1$:</u> Debemos tener $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} e^{2ax-4b} = e^{2a(1)-4b} = e^{2a-4b},$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (1 - x\ln x) = 1 - 1\cdot \ln 1 = 1 - 1\cdot 0 = 1,$$

$$f(1) = 1 - 1\cdot \ln 1 = 1.$$

Para la continuidad, $e^{2a-4b} = 1$. Tomando logaritmo neperiano en ambos lados:

$$\ln(e^{2a-4b}) = \ln(1) \quad \Rightarrow \quad 2a - 4b = 0 \quad \Rightarrow \quad a - 2b = 0.$$

<u>Derivabilidad en $x = 1$:</u> Debemos tener $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} f'(x)$. Primero, calculamos las derivadas de cada parte de la función: Para $x < 1$:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(e^{2ax-4b}) = e^{2ax-4b}\cdot(2a) = 2ae^{2ax-4b}.$$

Para $x > 1$:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(1 - x\ln x) = 0 - (1\cdot \ln x + x\cdot \frac{1}{x}) = -\ln x - 1.$$

Ahora, igualamos los límites de las derivadas en $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} 2ae^{2ax-4b} = 2ae^{2a-4b} = 2a\cdot 1 = 2a,$$

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} (-\ln x - 1) = -\ln 1 - 1 = -0 - 1 = -1.$$

Para la derivabilidad, $2a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$. Sustituimos el valor de a en la ecuación obtenida en continuidad:

$$-\frac{1}{2} - 2b = 0 \quad \Rightarrow \quad -2b = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad b = -\frac{1}{4}.$$

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{a = -\frac{1}{2}, \quad b = -\frac{1}{4}}$$

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 2.

Para $x = 2$, utilizamos la definición de la función para $x \geq 1$: $f(x) = 1 - x \ln x$. Primero, encontramos el valor de la función en $x = 2$:

$$f(2) = 1 - 2 \ln 2.$$

Luego, encontramos la derivada de la función para $x > 1$, que es $f'(x) = -\ln x - 1$. Evaluamos la derivada en $x = 2$:

$$f'(2) = -\ln 2 - 1.$$

La ecuación de la recta tangente en el punto $(x_0, f(x_0))$ es $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. En este caso, $x_0 = 2$, $f(2) = 1 - 2\ln 2$ y $f'(2) = -\ln 2 - 1$:

$$y - (1 - 2\ln 2) = (-\ln 2 - 1)(x - 2) \quad \Rightarrow \quad y - 1 + 2\ln 2 = (-\ln 2 - 1)x + 2\ln 2 + 2.$$

Despejando y:

$$y = -(1 + \ln 2)x + 3.$$

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{y = -(1 + \ln 2)x + 3}$$

Ejercicio 6. Análisis

Considera las funciones $\mathbf{f}, \mathbf{g}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $\mathbf{f(x) = |x|}$ y $\mathbf{g(x) = x^2 - 2}$.

a) **Calcula los puntos de corte de las gráficas de f y g. Esboza el recinto que determinan.**
b) **Determina el área del recinto anterior.**

Solución:

a) **Calcula los puntos de corte de las gráficas de f y g. Esboza el recinto que determinan.**

Para encontrar los puntos de corte, igualamos las funciones $f(x)$ y $g(x)$:

$$|x| = x^2 - 2$$

Consideramos dos casos:

Caso 1: $x \geq 0$. En este caso, $|x| = x$, por lo que la ecuación se convierte en:

$$x = x^2 - 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

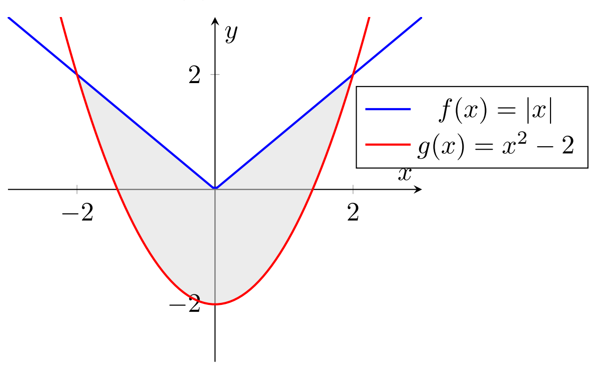
Factorizamos la ecuación cuadrática: $(x-2)(x+1) = 0$. Las soluciones son $x = 2$ y $x = -1$. Como estamos en el caso $x \geq 0$, la única solución válida es $x = 2$. El punto de corte es $(2, f(2)) = (2, |2|) = (2, 2)$.

Caso 2: $x < 0$. En este caso, $|x| = -x$, por lo que la ecuación se convierte en:

$$-x = x^2 - 2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

Factorizamos la ecuación cuadrática: $(x+2)(x-1) = 0$. Las soluciones son $x = -2$ y $x = 1$. Como estamos en el caso $x < 0$, la única solución válida es $x = -2$. El punto de corte es $(-2, f(-2)) = (-2, |-2|) = (-2, 2)$.

Entonces, los puntos de corte de las gráficas de f y g son $(-2, 2)$ y $(2, 2)$. El recinto está delimitado por la función $f(x) = |x|$ por encima y $g(x) = x^2 - 2$ por debajo, entre $x = -2$ y $x = 2$:



Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{\text{Los puntos de corte son } (-2, 2) \text{ y } (2, 2)}$$

b) **Determina el área del recinto anterior.**

El área del recinto se calcula mediante la integral definida de la diferencia entre la función superior ($f(x) = |x|$) y la función inferior ($g(x) = x^2 - 2$) entre los puntos de corte $x = -2$ y $x = 2$.

$$\text{Área} = \int_{-2}^{2} (f(x) - g(x))\, dx = \int_{-2}^{2} (|x| - (x^2 - 2))\, dx.$$

Debido a la simetría del recinto respecto al eje y, podemos calcular la integral de 0 a 2 y multiplicar por 2. Para $x \in [0, 2]$, $|x| = x$.

$$\text{Área} = 2\int_0^2 (x - (x^2 - 2))\,dx = 2\int_0^2 (x - x^2 + 2)\,dx.$$

Calculamos la integral indefinida:

$$\int (x - x^2 + 2)\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x + C.$$

Ahora evaluamos la integral definida:

$$\int_0^2 (x - x^2 + 2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x\right]_0^2 = \left(\frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3} + 2(2)\right) - \left(\frac{0^2}{2} - \frac{0^3}{3} + 2(0)\right) = \frac{10}{3}\ u^2.$$

El área total del recinto es:

$$\text{Área} = 2 \cdot \frac{10}{3} = \frac{20}{3}\ u^2.$$

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{\text{El área del recinto es } \frac{20}{3} \text{ unidades cuadradas}}$$

Ejercicio 7. Álgebra

Considera $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **y** $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$**.**

a) **Halla los valores de λ tales que $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \mathbf{0}$, donde $\vec{i}$ es la matriz identidad de orden 3.**
b) **Para $\lambda = 1$, resuelve el sistema dado por $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{X} = \mathbf{0}$. ¿Existe alguna solución tal que $\mathbf{z = 1}$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta.**

Solución:

a) **Halla los valores de λ tales que $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \mathbf{0}$, donde $\vec{i}$ es la matriz identidad de orden 3.**

La ecuación $|A - \lambda I| = 0$ es la ecuación característica de la matriz A. Primero, calculamos la matriz $A - \lambda I$:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}.$$

Ahora, calculamos el determinante de esta matriz:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}.$$

Desarrollamos el determinante por la primera columna:

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= (1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -\lambda & 2 \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)((-\lambda)(1-\lambda) - (2)(1)) = (1-\lambda)(-\lambda + \lambda^2 - 2) = (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2). \end{aligned}$$

Igualamos el determinante a cero para encontrar los valores de λ:

$$(1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0.$$

Factorizamos la ecuación cuadrática: $\lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1)$.

$$(1-\lambda)(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0.$$

Los valores de λ que satisfacen esta ecuación son $\lambda = 1$, $\lambda = 2$ y $\lambda = -1$.

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{\text{Los valores de } \lambda \text{ son } 1, 2 \text{ y } -1}$$

b) **Para $\lambda = 1$, resuelve el sistema dado por $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{X} = \mathbf{0}$. ¿Existe alguna solución tal que $\mathbf{z = 1}$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta.**

Para $\lambda = 1$, la matriz $A - \lambda I$ es:

$$A - 1 \cdot I = \begin{pmatrix} 1-1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

El sistema $(A - I)X = 0$ es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Este sistema de ecuaciones se escribe como:

$$\begin{aligned} 0x + 2y + 3z = 0 \quad &\Rightarrow \quad 2y + 3z = 0 && (1)\\ 0x - y + 2z = 0 \quad &\Rightarrow \quad -y + 2z = 0 && (2)\\ 0x + y + 0z = 0 \quad &\Rightarrow \quad y = 0 && (3) \end{aligned}$$

De la ecuación (3), tenemos $y = 0$. Sustituyendo este valor en la ecuación (2):

$$-0 + 2z = 0 \quad \Rightarrow \quad 2z = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 0.$$

Sustituyendo $y = 0$ y $z = 0$ en la ecuación (1):

$$2(0) + 3(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0.$$

La variable x no aparece en ninguna de las ecuaciones, por lo que puede tomar cualquier valor real. La solución general del sistema es $x = t$, $y = 0$, $z = 0$, donde $t \in \mathbb{R}$. En forma vectorial:

$$X = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para que exista una solución con $z = 1$, debemos tener $0 = 1$, lo cual es falso. Por lo tanto, no existe ninguna solución con $z = 1$.

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{\text{La solución del sistema es } x = t, y = 0, z = 0 \text{ con } t \in \mathbb{R}, \text{ y no existe ninguna solución con } z = 1}$$

Ejercicio 8. Geometría

Considera el plano $\pi \equiv \mathbf{x - y + z = 2}$ y la recta $\mathbf{r} \equiv \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{y+1}}{\mathbf{1}} = \frac{\mathbf{z+2}}{\mathbf{-1}}$.

a) **Calcula la distancia entre r y π.**
b) **Halla la ecuación general del plano perpendicular a π que contiene a r.**

Solución:

a) **Calcula la distancia entre r y π.**

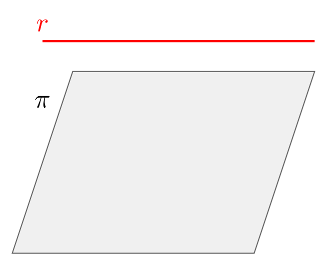
Primero, determinamos si la recta r y el plano π son paralelos. El vector normal del plano π es $\vec{n}_\pi = (1,-1,1)$. El vector director de la recta r se obtiene de su forma continua: $\vec{v}_r = (2,1,-1)$. Calculamos el producto escalar del vector normal del plano y el vector director de la recta:

$$\vec{n}_\pi \cdot \vec{v}_r = (1)(2) + (-1)(1) + (1)(-1) = 2 - 1 - 1 = 0.$$

Como el producto escalar es cero, el vector normal del plano es perpendicular al vector director de la recta, lo que significa que la recta es paralela al plano o está contenida en él. Para determinar si la recta está contenida en el plano, tomamos un punto de la recta. De la forma continua de r, un punto es $P_r(0,-1,-2)$. Sustituimos las coordenadas de este punto en la ecuación del plano:

$$(0) - (-1) + (-2) = 0 + 1 - 2 = -1.$$

Como $-1 \neq 2$, el punto P_r no pertenece al plano, por lo que la recta r es paralela al plano π y no está contenida en él.



La distancia entre una recta paralela a un plano es la distancia de cualquier punto de la recta al plano. Usamos la fórmula de la distancia de un punto (x_0, y_0, z_0) al plano $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

La ecuación del plano es $x - y + z - 2 = 0$, y el punto es $P_r(0,-1,-2)$. Sustituimos los valores:

$$d = \frac{|(1)(0) + (-1)(-1) + (1)(-2) - 2|}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (1)^2}} = \frac{|0 + 1 - 2 - 2|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{|-3|}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

Por lo tanto, la solución es:

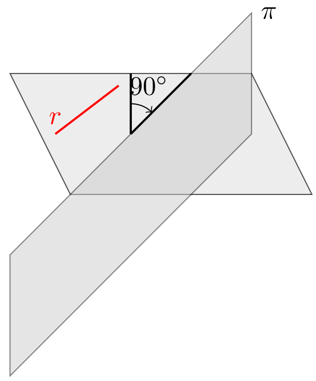
$$\boxed{\text{La distancia entre la recta } r \text{ y el plano } \pi \text{ es } \sqrt{3} \text{ unidades}}$$

b) **Halla la ecuación general del plano perpendicular a π que contiene a r.**

El plano que buscamos contiene a la recta r, por lo que su vector normal debe ser perpendicular al vector director de r, $\vec{v}_r = (2,1,-1)$. Además, este plano es perpendicular al plano π, por lo que su vector normal también debe ser perpendicular al vector normal de π, $\vec{n}_\pi = (1, -1, 1)$. El vector normal del plano buscado, $\vec{n}_{nuevo}$, será el producto vectorial de $\vec{v}_r$ y $\vec{n}_\pi$:

$$\vec{n}_{nuevo} = \vec{v}_r \times \vec{n}_\pi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = ((1)(1) - (-1)(-1))\vec{i} - ((2)(1) - (-1)(1))\vec{j} + ((2)(-1) - (1)(1))\vec{k}$$
$$= (0, -3, -3).$$

Podemos tomar como vector normal $\vec{n} = (0, 1, 1)$ (dividiendo por -3). El plano contiene a la recta r, por lo que pasa por el punto $P_r(0, -1, -2)$.



La ecuación del plano con vector normal $(0, 1, 1)$ que pasa por $(0, -1, -2)$ es:

$$0(x - 0) + 1(y - (-1)) + 1(z - (-2)) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 + (y + 1) + (z + 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad y + z + 3 = 0.$$

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{y + z + 3 = 0}$$